Казанский государственный университет

на правах рукописи

КОЛОМИНА МАРИНА ВЛАДИМИРОВНА

УДК 517.925

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(01.01.02 – дифференциальные уравнения)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-матеметических наук

Казань-2000

Работа выполнена на кафедре математического анализа Рязанского государственного педагогического университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор ТЕРЕХИН М.Т.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Малышев Ю.В.
кандидат физико-математических наук, доцент Деревенский В.П.

Ведущая организация – Мордовский государственный университет

Защита состоится 29 ноября 2000 года в 17 часов 30 минут на заседании диссертационного совета К 053.29.27 Казанского государственного университета по адресу: 420008 г. Казань, ул. Университетская, д. 17, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан "27" октября 2000 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
доктор физико-математических наук, профессор Плещинский Н.Б.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В настоящей работе рассматривается неавтономная система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Предполагается, что матрица коэффициентов представлена в виде частичной суммы ряда Фурье.

Исследование данной проблемы имеет важное значение, как для качественной теории дифференциальных уравнений, так и для исследования различных математических моделей в физике, химии, астрономии и других науках.

Проблемой существования периодических решений систем дифференциальных уравнений занимались Лаптинский В.Н., Соболевский П.Е., Бояринцев Ю.Е., Даревский В.М. Существенный вклад в развитие этой теории внесли Андронов А.А , Малкин И.Г., Красносельский М.П., Бойчук А.А., Демидович Б.П. и многие другие математики.

В силу сложности проблемы и многообразия конкретных систем дифференциальных уравнений общего подхода к решению поставленной задачи пока не найдено. Представляет интерес исследование неавтономных систем в случае, когда матрица линейного приближения критическая и требуется знать свойства нелинейной части системы. В связи с этим, задача поиска условий существования ненулевых периодических решений как линейных, так и нелинейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является весьма актуальной.

Цель работы состоит в получении условий существования ненулевых 2π-периодических решений для линейной и нелинейной систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Методика исследования. Задача поиска ненулевых 2π-периодических решений для линейной и нелинейной систем дифференциальных уравнений сводится к поиску коэффициентов ряда Фурье. Для решения этой задачи в линейной системе используется метод сравнения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, а так же метод неподвижной точки. Для нелинейной системы дифференциальных уравнений эта проблема решается с помощью разбиения основного пространства на прямую сумму нескольких подпространств. Задача определения условий существования 2π- периодического решения сводится к задаче о нахождении методом неподвижной точки некоторого тригонометрического многочлена и параметра.

Научная новизна. В диссертации найдены новые достаточные условия существования ненулевого периодического решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Утверждения сформулированы с привлечением свойств, как матрицы линейного приближения, так и свойств членов высших приближений нелинейной части системы. Интерес представляют способы разбиения пространства, в котором отыскивается решение.

Практическая ценность работы заключается в возможности применить полученные результаты к исследованию конкретных дифференциальных уравнений, являющихся моделями процессов, происходящих во всевозможных природных и социальных системах.

Апробация диссертации. Основные результаты докладывались на заседаниях научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном педагогическом университете, на Четвертой и Пятой Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов "Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании" в г. Рязани, на Четвертой Российской университетско-академической научно-практической конференции в г. Ижевске, на Региональной студенческой научной конференции "Современные подходы в формировании будущих специалистов по физическим и математическим дисциплинам" в г. Уфе, на Всероссийской конференции "Общие проблемы управления и их приложения к математической экономике" в г. Тамбове.

По теме диссертации опубликованы работы [1-12].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, списка литературы, включающего 98 наименований, и изложена на 119 страницах машинописного текста.

Содержание работы

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, обзор результатов по ее тематике, краткое описание методики исследования и содержания работы.

В главе I рассматривается линейная система дифференциальных уравнений вида

$$x = A(t)x + y, \tag{1}$$

где $A(t)$ – 2π-периодическая матрица, определяемая равенством

$$A(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos kt + B_k \sin kt\right), \tag{2}$$

A_0, A_k, B_k – постоянные $n \times n$-матрицы, $x \in R^n$,

$$y = y(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k \cos kt + d_k \sin kt\right), \tag{3}$$

$c_0, c_k, d_k \in R^n$ – известные векторы, $(c_0, c_1, d_1, \ldots) \in m_n$, где m_n – пространство ограниченных последовательностей n-мерных векторов. Если $z = (z_i)$, $z_i \in R^n$, $z \in m_n$, то $\|z\| = \sup\{|z_i|\}$, где $|z_i| = \max\limits_{1 \le j \le n}|z_{ij}|$.

Рассмотрим множество Φ всех тригонометрических рядов вида $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}a_k \cos kt + \frac{1}{k}b_k \sin kt\right)$ с коэффициентами из пространства m_n. Под нулем множества Φ понимаем ряд $0 = 0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(0\cos kt + 0\sin kt\right)$. На множестве Φ определены операции сложения, умножения, дифференцирования.

Система (1) представлена в виде

$$\Omega(t, x, y) \equiv x - A(t)x - y = 0.$$

Решение уравнения (1) будем отыскивать в виде тригонометрического ряда

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}a_k \cos kt + \frac{1}{k}b_k \sin kt\right), \tag{4}$$

где $a_0, a_k, b_k \in R^n$, $(a_0, a_1, b_1, \ldots) \in m_n$.

Определение 1.1. Под 2π-периодическим решением уравнения (1) будем понимать такой элемент $x_0 \in \Phi$, который удовлетворяет равенству $\Omega(t, x_0, y) = 0$.

В §1 устанавливаются условия существования решения дифференциального уравнения (1) в виде (4) с помощью метода сравнения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. С этой целью элемент $x(t) \in \Phi$ подставим в систему (1). Учитывая равенства (2), (3) и приравнивая коэффициенты рядов при соответствующих $\cos kt, \sin kt$, $k = 0, 1, \ldots$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов тригонометрического ряда:

$$q_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik} q_k + p_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

где $q = (q_1, q_2, q_3, \ldots) = (a_0, a_1, b_1, \ldots)$, $q_k \in R^n$, $p = (p_1, p_2, p_3, \ldots) = (c_0, d_1, c_1, \ldots)$, $p_k \in R^n$, C_{ik} – $n \times n$-матрица-коэффициент, при этом существует такое число $k_0 \in N$, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|C_{ik}\| \le v \qquad (i = 2k_0 + 2, 2k_0 + 3, \ldots), \tag{6}$$

где v – заданное число, $0 \le v < 1$, $\|C_{ik}\| = \max_j \sum_{l=1}^{n} \left|c_{jl}^{ik}\right|$, $C_{ik} = \left(c_{jl}^{ik}\right)$.

Определение 1.3. Бесконечная система (5), в которой сумма норм коэффициентов удовлетворяет неравенству $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_{ik}\| \le \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где n – размерность матрицы C_{ik}, называется вполне регулярной.

Обозначим через $\rho_i = (\rho_{i1}, \rho_{i2}, \ldots, \rho_{in})$ вектор, компоненты которого определяются по формулам $\rho_{ij} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \|C_{ik}\|$ $(j = 1, \ldots, n, \; i = 1, 2, \ldots)$, $\rho_{il} = \rho_{is}$, $l, s = 1, \ldots, n$.

Теорема 1.1. Если 1) система (5) вполне регулярная, то есть неравенство (6) выполняется и для $i = 1, \ldots, 2k_0 + 1$ при $v = \frac{1}{n}$, 2) выполняется неравенство $|p_{ij}| \le K\rho_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n,$ $i = 1, 2, \ldots)$, где K – постоянное число, $K > 0$, то система (1) имеет единственное 2π-периодическое решение в виде тригонометрического ряда (4).

В §2 определены условия существования и отсутствия 2π-периодических решений для системы дифференциальных уравнений (1) случае, когда система алгебраических уравнений (5) является квазирегулярной.

Определение 1.4. Система (5) называется квазирегулярной, если существуют числа $L > 0$ и $H > 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|C_{ik}\| \leq \frac{1}{n} \quad (i = L+1, L+2, \ldots),$$

где n – размерность матрицы C_{ik},

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \|C_{ik}\| < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, L), \\ &|p_{ij}| \leq H\rho_{ij} = H\left(1 - \sum_{k=L+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \|C_{ik}\|\right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \ i = L+1, L+2, \ldots) \end{aligned}\right\}$$

Из неравенства (6), где $\nu = \frac{1}{n}$, следует, что $L = 2k_0 + 1$, пусть $H = K$, тогда система (5) является квазирегулярной.

Рассматривается следующая вполне регулярная система уравнений

$$q_i = \sum_{k=2k_0+2}^{\infty} C_{ik} q_k + \left(p_i + \sum_{k=2k_0-2\omega+2}^{2k_0+1} C_{ik} q_k \right) \quad (i = 2k_0 + 2, 2k_0 + 3, \ldots). \quad (7)$$

Система (7) имеет решение

$$q_i = q_i^{(2k_0-2\omega+2)} + q_i^{(2k_0-2\omega+3)} + \ldots + q_i^{(2k_0+1)} + q_i^{*} \quad (i = 2k_0 + 2, 2k_0 + 3, \ldots), \quad (8)$$

где $q_i^{(l)}$ – решение системы $q_i = \sum_{k=2k_0+2}^{\infty} C_{ik} q_k + C_{il} q_l$ $(l = 2k_0 - 2\omega + {}$
${} + 2, \ldots, 2k_0 + 1, \ i = 2k_0 + 2, 2k_0 + 3, \ldots)$, q_i^{*} – решение системы $q_i = \sum_{k=2k_0+2}^{\infty} C_{ik} q_k + p_i$ $(i = 2k_0 + 2, 2k_0 + 3, \ldots)$.

Подставим решение (8) в уравнение $q_i = \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik} q_k + p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2k_0 + 1)$, в результате получим систему

$$\overline{C}\overline{q} = \overline{p}, \tag{9}$$

содержащую $(2k_0+1)n$ уравнений с $(2k_0+1)n$ неизвестными.

Теорема 1.2. Если 1) для компонент свободных членов системы (5) выполняется неравенство

$$\left|p_{ij}\right| \le K\rho_{ij} \quad (j=1,2,\ldots,n,\ i=2k_0+2,\ 2k_0+3,\ldots), \tag{10}$$

2) $rang\overline{C} = (2k_0+1)n$, то система дифференциальных уравнений (1) имеет единственное решение в виде тригонометрического ряда (4).

Теорема 1.3. Если 1) для компонент свободных членов системы (5) выполняется неравенство (10), 2) система (9) совместна и $rang\overline{C} < (2k_0+1)n$, то система дифференциальных уравнений (1) имеет бесконечное множество решений в виде тригонометрического ряда (4).

Теорема 1.4. Если 1) для компонент свободных членов системы (5) выполняется неравенство (10), 2) система (9) несовместна, то система дифференциальных уравнений (1) не имеет решений в виде тригонометрического ряда (4)

Во второй главе продолжается изучение проблемы существования 2π-периодического решения линейной системы дифференциальных уравнений (1) с матрицей вида (2). Последовательность коэффициентов ряда (4) рассматривается в пространстве l_1 сходящихся последовательностей n-мерных векторов. Рассматривается множество Φ всех тригонометрических рядов вида $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, $a_0, a_k, b_k \in R^n$. Кроме того рассматривается множество $\hat{\Phi}$ тригонометрических рядов с коэффициентами $a_0, a_k, b_k \in R^n$, $(a_0, a_1, b_1, \ldots) \in l_1$, $\hat{\Phi} \subset \Phi$. На множествах Φ и Φ определены операции сложения, умножения, дифференцирования.

Оператор B определим равенством

$$Bx = \dot{x} - A(t)x,$$

тогда систему (1) запишем в виде $\Omega(t,x,y)=0$, где $\Omega(t,x,y) \equiv Bx - y$

Периодическое решение системы (1) будем отыскивать в виде ряда Фурье

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{11}$$

где $a_0, a_k, b_k \in R^n$, $(a_0, a_1, b_1, \ldots) \in l_1$, $x(t) \in \hat{\Phi}$.

Определение 2.1. Под 2π-периодическим решением уравнения (1) будем понимать элемент $x_0 \in \hat{\Phi}$, который удовлетворяет равенству $\Omega(t, x_0, y) = 0$.

Обозначим $\Gamma = \max_k \{\|A_0\|, \|A_k\|, \|B_k\|\}$, $\|\bullet\|$ – норма матрицы.

Теорема 2.1. Если 1) A_0 – неособенная матрица, 2) для всех $k = 1, 2, \ldots, k_0$ выполняется неравенство $0 \le \Delta_1 < 1$, где $\Delta_1 = \Gamma_1 \left(2\omega + \frac{3}{2}\right)$, $\Gamma_1 = \max_m \left\{\|A_0^{-1} A_m\|, \|A_0^{-1} B_m\|, \Gamma\right\}$, то система дифференциальных уравнений (1) имеет единственное 2π-периодическое решение в виде ряда (11).

Теорема 2.2. Решение $x(t)$ системы (1) непрерывно и его ряд Фурье можно почленно интегрировать.

Уравнение $Bx = y$ эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье

$$Lx = y, \tag{12}$$

где

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 & 0 \\ L_3 & L_4 & L_5 & 0 \\ 0 & L_6 & L_7 & L_8 \\ 0 & 0 & L_9 & L_{10} \end{bmatrix},$$

L_1 – $(2k_0 + 1)n \times (2k_0 + 1)n$-матрица, L_2 – $(2k_0 + 1)n \times 2\omega n$-матрица, L_3 – $2\omega n \times (2k_0 + 1)n$-матрица, $L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9$ – $2\omega n \times 2\omega n$-матрицы, L_{10} – бесконечная матрица. Пусть $r_1 = rangL_1$, $r_1 < (2k_0 + 1)n$. Тогда получим матрицу

$$
\bar{L}=\begin{bmatrix} \bar{L}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_2 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_3 & \bar{L}_4 & \bar{L}_5 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}_6 & \bar{L}_7 & \bar{L}_8 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{L}_9 & \bar{L}_{10} \end{bmatrix},
$$

где $\bar{L}_1$ – $r_1 \times r_1$-матрица, $\bar{L}_2$ – $((2k_0+1)n-r_1)\times 2\omega n$-матрица, $\bar{L}_3$ – $2\omega n\times((2k_0+1)n-r_1)$-матрица, $\bar{L}_4$, $\bar{L}_5$, $\bar{L}_6$, $\bar{L}_7$, $\bar{L}_8$, $\bar{L}_9$ – $2\omega n\times 2\omega n$-матрицы, $\bar{L}_{10}$ – бесконечная матрица. Положим $r_2 = rang\bar{L}_2$, $r_3 = rang\bar{L}_3$. Рассмотрим случай, когда $r_2 = r_3 = \min\{2\omega n, (2k_0+1)n - r_1\}$. Вводится обозначение $\Delta_3 = \mu_3\Gamma_3 + \dfrac{2\omega+1}{k_0+\mu_3/2+1}\Gamma$, μ_3 – число строк, содержащих матрицы U'_{im}, V'_{im}, $U'_{i+1,m}$, $V'_{i+1,m}$ полученные в результате элементарных преобразований из матриц A_0, A_k, B_k, $\Gamma_3 = \max\limits_{i,m}\left\{\|U'_{im}\|, \|V'_{im}\|, \|U'_{i+1,m}\|, \|V'_{i+1,m}\|\right\}$.

Теорема 2.4. Если 1) $rangL_1 < (2k_0+1)n$, 2) $rang\bar{L}_2 = rang\bar{L}_3 = \min\{2\omega n, (2k_0+1)n - r_1\}$, 3) выполняется неравенство

$$
0 \le \Delta_3 < 1, \tag{13}
$$

то система дифференциальных уравнений (1) имеет единственное непрерывное решение в виде ряда Фурье (11).

Пусть $r_2 = r_3 < \min\{2\omega n, (2k_0+1)n - r_1\}$. Тогда система (12) эквивалентна системе $\hat{L}\hat{x} = \hat{y}$, которая распадается на системы

$$
G_1\hat{x}_1 = \hat{y}_1, \tag{14}
$$
$$
G_2\hat{x}_2 = \hat{y}_2,
$$

$$
G_1=\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{L}_3 & 0 & \tilde{L}_{41} & \tilde{L}_{42} & \tilde{L}_{51} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ G_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{43} & \tilde{L}_{44} & \tilde{L}_{52} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_{61} & \tilde{L}_{62} & \tilde{L}_7 & \tilde{L}_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{L}_9 & \tilde{L}_{10} \end{bmatrix},
$$

матрицы $\tilde{L}_i$ получены из матриц $\bar{L}_i$ с помощью элементарных переобразований. Обозначим $\Delta_4 = \mu_4\Gamma_4 + \frac{2\omega+1}{k_0+\mu_4/2+1}\Gamma$, μ_4 – число строк, содержащих матрицы U'_{im}, $U'_{i+1,m}$, U'_{jm}, $U'_{j+1,m}$, V'_{im}, $V'_{i+1,m}$, V'_{jm}, $V'_{j+1,m}$, полученные в ходе элементарных преобразований из матриц A_0, A_k, B_k, $\Gamma_4 = \max_{i,m,j}\Big\{\|U'_{im}\|, \|U'_{i+1,m}\|,$ $\|U'_{jm}\|, \|U'_{j+1,m}\|, \|V'_{im}\|, \|V'_{i+1,m}\|, \|V'_{jm}\|, \|V'_{j+1,m}\|, \|U'_{2k_0+\bar{r}_3+3,m}\|, \|V'_{2k_0+\bar{r}_3+3,m}\|,$ $\left\|\begin{matrix} U'_{\bar{r}_4+1,m} \\ V'_{2k_0+\bar{r}_3+2,m}\end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} U'_{\bar{r}_4+1,m} \\ V'_{2k_0+\bar{r}_3+2,m}\end{matrix}\right\|\Big\}$.

Теорема 2.5. Если 1) $rangL_1 < (2k_0+1)n$, 2) $rang\overline{L}_2 = rang\overline{L}_3 < \min\{2\omega n, (2k_0+1)n - r_1\}$, 3) система (14) совместна, 4) выполняется неравенство

$$0 \le \Delta_4 < 1, \tag{15}$$

то система дифференциальных уравнений (1) имеет бесконечное множество непрерывных решений $x(t)$ в виде ряда (11).

Теорема 2.6. Если 1) $rangL_1 < (2k_0+1)n$, 2) $rang\overline{L}_2 = rang\overline{L}_3 < \min\{2\omega n, (2k_0+1)n - r_1\}$, 3) система (14) несовместна, то система дифференциальных уравнений (1) не имеет решений в виде ряда Фурье (11).

В §2 второй главы изучается вопрос существования 2π-периодического решения при условии, что s, $1 \le s < 2\omega+1$, первых матриц в равенстве (2) особенные, и случай, когда все матрицы $A_0, A_k, B_k, k = 1,\dots,\omega$, особенные. Получены достаточные условия существования бесконечного множества непрерывных решений в виде ряда Фурье для линейной системы дифференциальных уравнений (1). В §3 исследован вопрос существования непрерывного 2π-периодического решения обладающего w, $w \ge 2$, непрерывными производными.

В третьей главе исследуется проблема существования 2π-периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений.

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \lambda), \tag{16}$$

где $A(t)$ – 2π-периодическая матрица, определяемая равенством

(2), $x \in R^n$, $\lambda \in R^p$, вектор-функция $f(t, x, \lambda)$ непрерывна по x и по λ, 2π-периодическая по t и $f(t, 0, \lambda) = 0$ при всех $\lambda \in R^p$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(t, x, \lambda)}{\|x\|} = 0$ равномерно относительно t и λ, допускает представление $f(t, x, \lambda) = C(t, x, \lambda) + D(t, x, \lambda)$, где вектор-функция $C(t, x, \lambda)$ – форма степени $s > 1$ относительно переменных x и λ, вектор-функция $D(t, x, \lambda)$ – конечная сумма форм степени выше, чем s по x и по λ. В §1 третьей главы изучаются свойства пространств связанных с решением системы (16). Дано определение 2π-периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. На множестве тригонометрических рядов рассмотрены свойства оператора B. Рассмотрим уравнение

$$H(t, x, \lambda) = 0, \tag{17}$$

где $H(t, x, \lambda) \equiv Bx - C(t, x, \lambda) - D(t, x, \lambda)$. Периодическое решение системы (16) будем отыскивать в виде ряда Фурье (11).

Определение 3.1. Под 2π-периодическим решением уравнения (16) будем понимать такой элемент $x_0 \in \hat{\Phi}$, который удовлетворяет равенству (17).

Определение 3.2. Ненулевой элемент $x(t) \in \hat{\Phi}$ назовем собственным элементом оператора B, соответствующим собственному значению τ оператора B, если $Bx - \tau x$ является нулевым элементом множества Φ.

Теорема 3.3. Если 1) $r_1 < (2k_0 + 1)n$, 2) $r_2 = r_3 = \min\{2\omega n, (2k_0 + 1)n - r_1\}$, 3) выполняется неравенство (13), то ноль не является собственным значением оператора B.

Теорема 3.4. Если выполняются условия теоремы 3.3, то оператор B имеет обратный оператор B^{-1} на множестве $\hat{\Phi}$.

Рассмотрим множество $U(\rho) = \left\{x : x(t) \in \hat{\Phi}, \|x\|_{l_1} \le \rho\right\}$, где

$$\|x\|_{l_1} = \|a_0\|_{R^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\|a_k\|_{R^n} + \|b_k\|_{R^n}\right)$$

Теорема 3.5. Если оператор B не имеет нулевого собственного значения, то существует такое $\rho > 0$, что уравнение (17) имеет только нулевое решение на множестве $U(\rho)$.

Теорема 3.6. Если 1) $r_1 < (2k_0 + 1)n$, 2) $r_2 = r_3 < \min\{2am, (2k_0 + 1)n - r_1\}$, 3) выполняется неравенство (15), то оператор B имеет собственные элементы, соответствующие нулевому собственному значению.

В §2 третьей главы основное пространство $\hat{\Phi}$ разбивается на прямую сумму двух подпространств, одно из которых содержит конечную часть ряда (11), а другое Φ_0 – бесконечную. Рассуждения проводятся в предположении, что выполняются условия теоремы 3.6, то есть оператор B имеет m собственных элементов $h_1, h_2, \ldots, h_m$, соответствующих нулевому собственному значению. Каждый элемент $x \in \hat{\Phi}$ можно единственным образом представить в виде

$$x = Px + \sum_{i=1}^{m} \xi_i(x) h_i \tag{18}$$

где P и ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ определяются следующим образом:

1) для любого $x \in \hat{\Phi}$ Px таково, что при разложении Px в ряд Фурье последовательность коэффициентов Фурье имеет вид при $\bar{r}_4$ – нечетном

$$\hat{x} = \left(a_{0j}, a_{1j}, b_{1j}, \ldots, a_{\frac{\bar{r}_4+1}{2},1}, \ldots, a_{\frac{\bar{r}_4+1}{2},q_4}, 0, \ldots, 0, a_{k_0+1,j}, b_{k_0+1,j}, \ldots \right),$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, $\bar{r}_4$ удовлетворяет равенству $r_4 = \bar{r}_4 n + q_4$, где $r_4 = r_1 + r_3$ и при $\bar{r}_4$ – четном

$$\hat{x} = \left(a_{0j}, a_{1j}, b_{1j}, \ldots, a_{\frac{\bar{r}_4}{2},j}, b_{\frac{\bar{r}_4}{2},1}, \ldots, b_{\frac{\bar{r}_4}{2},q_4}, 0, \ldots, 0, a_{k_0+1,j}, b_{k_0+1,j}, \ldots \right),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, где $\hat{x} = \hat{S}_2 \bar{S}_2 x$, $\hat{S}_2, \bar{S}_2$ – матрицы элементарных преобразований;

2) $\xi_i(x) = (x, h_i) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) h_i \, dt$ для любого $x \in \hat{\Phi}$ и для $i = 1, 2, \ldots, m$

Выбранные P и $\xi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ обладают свойствами: 1) $\xi_i(h_i) = (h_i, h_i) = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$; 2) $\xi_i(h_j) = (h_i, h_j) = 0$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq j$; 3) $\xi_i(x) = (x, h_i) = 0$ для всех $x \in \Phi_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; 4) $Px = x$ для всех $x \in \Phi_0$; 5) $Px \in \Phi_0$ для всех $x \in \hat{\Phi}$; 6) $PBx = BPx$ для всех $x \in \hat{\Phi}$.

Теорема 3.7. В пространстве Φ_0 у оператора B существует обратный ограниченный оператор B^{-1}.

С учетом равенства (18), получим, что уравнение (17) равносильно системе

$$P(H(t, x, \lambda)) = 0, \tag{19.0}$$

$$\xi_1(H(t, x, \lambda)) = 0, \tag{19.1}$$

. . . .

$$\xi_m(H(t, x, \lambda)) = 0. \tag{19.m}$$

Решение уравнения (19.0) отыскивается в виде

$$x_\alpha = Px_\alpha + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h_i ,$$

где $\alpha = colon(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ – произвольный вектор.
Уравнение (19.0) примет вид

$$y_\alpha = Z(t, y_\alpha, \alpha, \lambda). \tag{20}$$

где, $Z(t, y_\alpha, \alpha, \lambda) = B^{-1}P\left(C\left(t, y_\alpha + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i, \lambda\right) + D\left(t, y_\alpha + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i h_i, \lambda\right)\right)$, $y_\alpha = Px_\alpha$.

Теорема 3.9. Существует число $\rho > 0$ такое, что уравнение (20) определяет на множестве $U(\rho)$ единственную функцию $y_\alpha = \psi(t, \alpha, \lambda)$ непрерывную по α и по λ.

Исследованы свойства функции $y_\alpha = \psi(t, \alpha, \lambda)$.

Положим $\xi = colon(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, тогда систему (19.1)-(19.m) можно представить в виде

$$\xi(\overline{C}(t, \alpha, \lambda)) + \xi(\overline{D}(t, \alpha, \lambda)) = 0,$$

или

$$\widetilde{C}(\alpha, \lambda) + \widetilde{D}(\alpha, \lambda) = 0, \tag{21}$$

где $\widetilde{C}(\alpha, \lambda) = \xi\left(\overline{C}(t, \alpha, \lambda)\right)$, $\widetilde{D}(\alpha, \lambda) = \xi\left(\overline{D}(t, \alpha, \lambda)\right)$, **причем размерность вектор-функций** $\widetilde{C}(\alpha, \lambda)$, $\widetilde{D}(\alpha, \lambda)$ **равна** m.

Итак, задача нахождения периодического решения уравнения (17) сводится к вопросу о разрешимости нелинейного уравнения (21).

В §3 третьей главы исследование нелинейного векторного уравнения (21) проводится с помощью разложения некоторых форм по формуле Тейлора и применения метода неподвижной точки. Уравнение (21) запишем в виде

$$\widetilde{C}(z) + o\left(\|z\|^{s}\right) = 0 \tag{22}$$

где функция $\widetilde{C}(\alpha, \lambda)$ – форма s-го порядка по z, $z = colon(\alpha, \lambda)$.

Теорема 3.12. Если $\widetilde{C}(\widetilde{z}) \neq 0$ для любого $\widetilde{z} \in R^{m+p}$ такого, что $\|\widetilde{z}\| = 1$, то найдется такое число $\rho > 0$, что при всех $\|\lambda\| < \rho$, $\|\alpha\| < \dfrac{\rho}{2}$ система (16) имеет только нулевое решение.

Теорема 3.13. Если 1) существует вектор $\widetilde{z} = colon(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\lambda})$, $\|\widetilde{z}\| = 1$ такой, что $\widetilde{C}(\widetilde{z}) = 0$, где $\widetilde{\alpha} \in R^{m}$, $\widetilde{\alpha} \neq 0$, $\widetilde{\lambda} \in R^{p}$, 2) $rang\Lambda = m$, где $\Lambda = \left.\dfrac{\partial \widetilde{C}(z)}{\partial z}\right|_{z=\widetilde{z}}$, то система (16) имеет 2π-периодическое непрерывное решение в виде (11).

Далее рассмотрен случай, когда не выполняется условие 2) теоремы 3.13. Решение уравнения (22) отыскивается в виде $z = \zeta(\widetilde{z} + \Delta z)$, при этом уравнение (22) принимает вид

$$\Lambda \Delta z + o\left(\|\Delta z\|\right) + O(\zeta, z + \Delta z) = 0. \tag{23}$$

В случае, когда $rang\Lambda = k < m$, для определенности

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix},$$

где Λ_1 – $k \times k$-матрица. Тогда уравнение (23) можно записать в виде системы

$$\Lambda_1\Delta z_1+\Lambda_2\Delta z_2=o(\|\Delta z\|)+O(\zeta_1), \tag{24}$$

$$\Lambda_3\Delta z_1+\Lambda_4\Delta z_2=o'(\|\Delta z\|)+O(\zeta_1), \tag{25}$$

где Δz_1 – вектор содержащий k первых компонент вектора Δz, Δz_2 состоит из остальных $m+p-k$ компонент, $O(\zeta_1)=O(\zeta,\tilde z+\Delta z)$, $O(\zeta_1)\to 0$ при $\zeta_1\to 0$ равномерно относительно Δz. Из уравнения (24) находим

$$\Delta z_1=\Lambda_1^{-1}\left(-\Lambda_2\Delta z_2+o(\|\Delta z\|)+O(\zeta_1)\right). \tag{26}$$

После подставки выражения (26) в уравнение (25), получим систему

$$\begin{gathered}\Lambda_1\Delta z_1+\Lambda_2\Delta z_2=o(\|\Delta z\|)+O(\zeta_1),\\ o^*(\|\Delta z\|)+O(\zeta_1)=0,\end{gathered} \tag{27}$$

где $o^*(\|\Delta z\|)=\Lambda_3\Lambda_1^{-1}o(\|\Delta z\|)-o'(\|\Delta z\|)$. Пусть $o^*(\|\Delta z\|)=F(\Delta z)+o\left(\|\Delta z\|^{s_1}\right)$, где $F(\Delta z)$ – форма порядка s_1 по Δz, $s_1>1$. Учитывая (26), приведем систему (27) к виду

$$\begin{gathered}\Lambda_1\Delta z_1+\Lambda_2\Delta z_2=o(\|\Delta z\|)+O(\zeta_1),\\ \overline{F}(\Delta z_2)+o\left(\|\Delta z\|^{s_1}\right)+O(\zeta_1)=0,\end{gathered} \tag{28}$$

где $\overline{F}(\Delta z_2)$ – форма порядка s_1 по Δz_2, которая получается из $F(\Delta z)$ заменой $\Delta z=colon\left(-\Lambda_1^{-1}\Lambda_2\Delta z_2,\ \Delta z_2\right)$.

Теорема 3.14. Если 1) существует вектор $\tilde z=colon(\tilde\alpha,\ \tilde\lambda)$, $\|\tilde z\|=1$ такой, что $\tilde C(\tilde z)=0$, где $\tilde\alpha\in R^m$, $\tilde\alpha\neq 0$, $\tilde\lambda\in R^p$,

2) $rang\Omega_1=k<m$, $\Omega_1=\left.\dfrac{\partial\tilde C(z)}{\partial z}\right|_{z=\tilde z}$, 3) существует вектор $\Delta\tilde z_2\in R^{m+p-k}$ такой, что в системе (28) $\overline{F}(\Delta\tilde z_2)=0$,

4) $rang\Omega_2=m-k$, где $\Omega_2=\left.\dfrac{\partial\overline{F}(\Delta z_2)}{\partial\Delta z_2}\right|_{\Delta z_2=\Delta\tilde z_2}$, то система (16) имеет 2π-периодическое непрерывное решение в виде (11).

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Терехину М.Т. за постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку.

1. Коломина М.В. Периодическое решение линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань. 1999. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 31.05.99. № 1750-В99. Реферат статьи опубликован в РЖ "Математика". 1999. Т. 11. 11Б155ДЕП.
2. Коломина М.В. Условия существования периодических решений линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань. 1999. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 31.05.99. № 1751-В99.
3. Коломина М.В. Существование периодического решения системы дифференциальных уравнений в виде ряда Фурье (тезисы доклада) // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Четвертая Всероссийская научно-техническая конференция студентов, молодых ученых и специалистов. Тезисы докладов. Рязань.: Изд. РГРТА. 1999. С. 44-45.
4. Коломина М.В. Периодическое решение линейной системы с переменными коэффициентами (тезисы докладов) // Четвертая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция. Тезисы докладов. Ижевск: Изд. Удм. ун-та. 1999. Ч. 6. С. 43.
5. Коломина М.В. О периодических решениях линейной системы дифференциальных уравнений // Изв. РАЕН. Дифференциальные уравнения. Рязань. Изд. РГПУ 1999. № 2. С. 30-33.
6. Коломина М.В. О периодическом решении для линейной системы с переменными коэффициентами (тезисы докладов) // Современные подходы в формировании будущих специалистов по физическим и математическим дисциплинам. Сборник тезисов региональной студенческой научной конференции. Уфа Изд БашГПИ. 1999. I. С. 36.
7. Коломина М.В. Применение теории бесконечных систем к решению линейной системы дифференциальных уравнений / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань. 1999. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 23.09.99. № 2914-В99. Реферат статьи опубликован в РЖ Математика 2000 Т. 4 00.04-13Б. 224 ДЕП.
8. Коломина М.В. Исследование свойств решений бесконечной системы линейных уравнений / Ряз. гос. пед.

ун-т. Рязань. 1999. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 23.09.99. № 2915-В99.

9. Коломина М.В. Определение условий существования только нулевого решения системы дифференциальных уравнений / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань. 2000. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 19.04.2000. № 1058-В00.
10. Коломина М.В. Решение нелинейной системы дифференциальных уравнений, определенное в виде ряда Фурье (тезисы докладов) // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Пятая Всероссийская научно-техническая конференция студентов, молодых ученых и специалистов. Тезисы докладов. Рязань.: Изд. РГРТА. 2000. С. 21-24.
11. Коломина М.В. К вопросу о существовании периодического решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Изв. РАЕН. Дифференциальные уравнения. Рязань.: Изд. РГПУ. 2000. № 3. С 34-39.
12. Коломина М.В. Некоторые условия существования решения в виде ряда Фурье для нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки. Тамбов, 2000. Т.5. Вып.4. с 463-464

2-Ol